Zahlenmengen
Übung

1. In welchen Zahlenmengen sind die folgenden Zahlen jeweils enthalten (✓) oder nicht (x)?

	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{N}$
$\frac{3}{-2}$				
$0,\overline{531}$				
-100				
$\sqrt{33}$				
$\frac{-99}{-11}$				
π				
$\sqrt{\frac{36}{25}}$				
$\log_6(8)$				

2. Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Entscheidung!

   a) Die Differenz zweier natürlicher Zahlen ist in jedem Fall wieder eine natürliche Zahl.

   b) Zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen liegt stets eine weitere rationale Zahl.

   c) Das Produkt zweier ganzer Zahlen ist wieder eine ganze Zahl.

   d) Die Zahl 5 ist eine reelle Zahl.

   e) Eine rationale Zahl besitzt stets eine endliche Dezimaldarstellung.

   f) Es existieren unendlich viele ganze Zahlen kleiner als 7.

   g) Eine ganze Zahl ist immer auch rational.

   h) Die Division zweier ganzer Zahlen ist wieder eine ganze Zahl.

   i) Jede irrationale Zahl ist auch eine reelle Zahl.

   j) Die Quadratwurzel einer natürlichen Zahl ist immer irrational.

   k) Die Quadratwurzel aus einer Primzahl ist stets irrational.

3. Markieren Sie alle irrationalen Zahlen.

4 π $\sqrt{324}$ $12\sqrt{2}$ $\frac{3}{-4}$ $0,\overline{7}$

4. Ordnen Sie die aufgeführten Begriffe den Lücken ① bis ⑦ des nachfolgenden Texts zu.

- **irrationalen Zahlen**
- **Hamiltonsche Quaternionen**
- **rationalen Zahlen**
- **natürlichen Zahlen**
- **reellen Zahlen**
- **ganzen Zahlen**
- **komplexen Zahlen**

Die Menge der ① $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; \dots\}$ ist die kleinste aller bekannten Zahlenmengen, besitzt jedoch bereits unendlich viele Elemente.

Erweitert man diese um die Null und die negativen ganzen Zahlen, so erhält man mit $\{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$ die Menge $\mathbb{Z}$ der ②.

Die ③ $\mathbb{Q}$ umfassen alle Zahlen, die in der Form $\frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$ und $q \neq 0$ geschrieben werden können.

Werden nun noch die ④ (häufig mit $\mathbb{I}$ bezeichnet) wie $\sqrt{2}$, die Kreiszahl π oder die Eulersche Zahl e hinzugefügt, so ergibt sich die Menge aller ⑤ $\mathbb{R}$.

Möchte man alle algebraischen Gleichungen wie beispielsweise $x^2 + 1 = 0$ lösen, dann muss man durch Einführen der imaginären Einheit $i \coloneqq \sqrt{-1}$ diesen Zahlenbereich nochmals erweitern. Es ergibt sich die Menge der ⑥ $\mathbb{C}$.

Die größte bisher verwendete Zahlenmenge wurde bereits 1843 von Sir William Rowan Hamilton entwickelt und ihm zu Ehren als ⑦ $\mathbb{H}$ bezeichnet.

Zahlenmengen
Lösung

1.

	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{N}$
$\frac{3}{-2}$	x	✓	✓	x
$0,\overline{531}$	x	✓	✓	x
-100	✓	✓	✓	x
$\sqrt{33}$	x	✓	x	x
$\frac{-99}{-11} = 9$	✓	✓	✓	✓
π	x	✓	x	x
$\sqrt{\frac{36}{25}} = \frac{6}{5}$	x	✓	✓	x
$\log_6(8)$	x	✓	x	x

2.

a) Falsch, so ergibt die Differenz $2 - 5 = -3$ keine natürliche Zahl.
b) Wahr. Sind a und b zwei verschiedene rationale Zahlen, so ist $\frac{1}{2} \cdot (a + b)$ diejenige rationale Zahl, die in der Mitte zwischen a und b liegt.
c) Wahr, die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist bezüglich der Multiplikation abgeschlossen.
d) Wahr, 5 ist eine natürliche Zahl und damit insbesondere reell.
e) Falsch, so besitzt die rationale Zahl $\frac{1}{3}$ mit $0,\overline{3}$ eine unendliche Dezimaldarstellung.
f) Wahr. Die natürlichen Zahlen von 1 bis 6 gehören dazu sowie alle negativen ganzen Zahlen.
g) Wahr. Die Menge der ganzen Zahlen ist vollständig in den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ enthalten.
h) Falsch. Beispielsweise ist $2:3 = \frac{2}{3}$ keine ganze Zahl.
i) Wahr. Die reellen Zahlen umfassen neben den rationalen Zahlen auch die irrationalen Zahlen.
j) Falsch, die Wurzel einer Quadratzahl wie 9 ist natürlich.
k) Wahr, eine Primzahl kann nie eine Quadratzahl sein.

3. Die 4 ist eine natürliche Zahl und $\sqrt{324} = 18$ ebenso. $\frac{3}{-4}$ und $0,\overline{7} = \frac{7}{9}$ sind beides Brüche, also rational. Es bleiben π und $12\sqrt{2}$ als irrationale Zahlen.

4. Die Menge der **natürlichen Zahlen** $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; \dots\}$ ist die kleinste aller bekannten Zahlenmengen, besitzt jedoch bereits unendlich viele Elemente.

   Erweitert man diese um die Null und die negativen ganzen Zahlen, so erhält man mit $\{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$ die Menge $\mathbb{Z}$ der **ganzen Zahlen**.

   Die **rationalen Zahlen** $\mathbb{Q}$ umfassen alle Zahlen, die in der Form $\frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$ und $q \neq 0$ geschrieben werden können.

   Werden nun noch die **irrationalen Zahlen** (häufig mit $\mathbb{I}$ bezeichnet) wie $\sqrt{2}$, die Kreiszahl π oder die Eulersche Zahl e hinzugefügt, so ergibt sich die Menge aller **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$.

   Möchte man alle algebraischen Gleichungen wie beispielsweise $x^2 + 1 = 0$ lösen, dann muss man durch Einführen der imaginären Einheit $i \coloneqq \sqrt{-1}$ diesen Zahlenbereich nochmals erweitern. Es ergibt sich die Menge der **komplexen Zahlen** $\mathbb{C}$.

   Die größte bisher verwendete Zahlenmenge wurde bereits 1843 von Sir William Rowan Hamilton entwickelt und ihm zu Ehren als **Hamiltonsche Quaternionen** $\mathbb{H}$ bezeichnet.